SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1998-99

Fabio Ancona

ESISTENZA DI SOLUZIONI PER SISTEMI IPERBOLICI DI LEGGI DI CONSERVAZIONE

17 giugno 1999

Tecnoprint - Bologna 2000

SUNTO. Si considera il problema di Cauchy per sistemi strettamente iperbolici di leggi di conservazione

$$u_t + [F(u)]_x = 0, \qquad u(0,x) = \overline{u}(x), \tag{PC}$$

in una singola variabile spaziale $x \in \mathbb{R}$. Si discute la teoria generale sull'esistenza di soluzioni di (PC), globalmente definite nel tempo, per dati iniziali $\overline{u} = \overline{u}(x)$ con variazione totale sufficientemente piccola. In particolare, si presentano alcuni risultati recentemente ottenuti in collaborazione col Dott. Andrea Marson, per una classe di sistemi che non soddisfano classiche ipotesi di convessità della funzione $F = F(u)$.

ABSTRACT. We consider the Cauchy problem for strictly hyperbolic systems of conservation laws in one space dimension

$$u_t + [F(u)]_x = 0, \qquad u(0,x) = \overline{u}(x). \tag{CP}$$

We discuss the general theory on the existence of global solutions to (CP), with initial data with small total variation. In particular, we present some recent results obtained in collaboration with Dott. Andrea Marson for a class of systems which do not satisfy classical convexity assumptions on the flux funxtion $F = F(u)$.

1. Introduzione

In questo seminario consideriamo il problema di Cauchy per sistemi iperbolici di leggi di conservazione

$$u_t + [F(u)]_x = 0, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \overline{u}(x), \tag{2}$$

in una singola variabile spaziale $x \in \mathbb{R}$. Qui $u = u(t,x)$ può essere interpretata come la densità di una quantità fisica conservata e $F = F(u)$ come la corrispondente funzione flusso.

Discuteremo la teoria generale sull'esistenza di soluzioni di (1)-(2), globalmente definite nel tempo, per dati iniziali $\overline{u} \doteq \overline{u}(x)$ con variazione totale sufficientemente piccola. In particolare vogliamo presentare alcuni risultati, recentemente ottenuti in collaborazione col Dott. Andrea Marson, per una classe di sistemi che non soddisfano classiche ipotesi di convessità della funzione $F = F(u)$, nel senso che verrà meglio precisato in seguito.

La funzione flusso $F : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ si suppone essere regolare e definita in un intorno dell'origine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Denotiamo $\lambda_1(u), \dots, \lambda_n(u)$, gli autovalori della matrice Jacobiana $A(u) \doteq DF(u)$, e chiamiamo $r_1(u), \dots, r_n(u)$, una base di autovettori destri di $A(u)$.

L'ipotesi generale che faremo su (1) è che il sistema sia **strettamente iperbolico** e cioè che gli autovalori $\lambda_i(u)$ siano tutti reali e distinti. In particolare possiamo supporre che

$$\lambda_1(u) < \cdots < \lambda_n(u) \qquad \forall\, u \in \Omega. \tag{3}$$

Una caratteristica fondamentale di equazioni nonlineari del tipo (1) è che, in generale, la soluzione del problema di Cauchy sviluppa delle discontinuità in tempo finito, anche nei casi in cui si considerino condizioni iniziali regolari (di classe C^∞). Pertanto, volendo ottenere dei risultati di esistenza globale ed essendo il sistema (1) scritto in forma di divergenza, risulta naturale lavorare nella classe delle funzioni discontinue interpretando la soluzione di (1) come soluzione nel senso delle distribuzioni. Più precisamente, diremo che una funzione localmente integrabile $u = u(t,x)$ è **soluzione debole** del problema di Cauchy (1)-(2) se

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u \cdot \phi_t + F(u) \cdot \phi_x] dx dt + \int_{-\infty}^\infty \overline{u}(x) \cdot \phi(0,x)\, dx = 0 \tag{4}$$

per ogni $\phi \in C^1$ a supporto compatto. Consideriamo ora una soluzione debole $u = u(t,x)$ di (1.1) che sia discontinua lungo una retta (nel piano x-t) di equazione $x = \gamma(t)$ e chiamiamo

$$u^S(t) \doteq \lim_{x \to \gamma(t)-} u(t,x), \qquad u^D(t) \doteq \lim_{x \to \gamma(t)+} u(t,x), \tag{5}$$

i limiti sinistro e destro di $u(t,\cdot)$ nel punto di salto. Fissando un'arbitraria funzione test $\phi \in C^1$ con supporto in una regione Γ attorno a γ, e applicando il teorema della divergenza al campo vettoriale $(u \cdot \phi,\, F(u) \cdot \phi)$, si può facilmente dedurre dalla (4) che lungo γ deve valere la relazione

$$(u^D - u^S)\, \dot{\gamma} = F(u^D) - F(u^S). \tag{6}$$

L'equazione vettoriale (6) è nota come **condizione di Rankine-Hugoniot (RH)**. Data una coppia di stati $(u^S,\, u^D)$, diremo che u^S, u^D soddisfano le condizioni **(RH)** se verificano la (6) per un qualche scalare $\lambda \doteq \dot{\gamma} \in \mathbb{R}$. Fissato uno stato (sinistro) $u^0 \in \Omega$, per determinare l'insieme degli stati (destri) $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \Omega$ che soddisfano la (6) dobbiamo risolvere il sistema di n equazioni scalari

$$(u - u^0)\, \lambda = F(u) - F(u^0) \tag{7}$$

nelle $n+1$ incognite $(u_1, \ldots, u_n, \lambda)$. Usando il teorema delle funzioni implicite, si mostra che (localmente) tale insieme consiste di n curve regolari. Più precisamente, esistono n curve regolari $\sigma \to S_i(u^0)[\sigma]$, $i = 1, \ldots, n$, ed n funzioni scalari $\sigma \to \lambda_i^s(u^0)[\sigma]$, $i = 1, \ldots, n$, che soddisfano

$$\Big(S_i(u^0)[\sigma] - u^0\Big)\, \lambda_i^s(u^0)[\sigma] = F\Big(S_i(u^0)[\sigma]\Big) - F(u^0) \qquad \forall\, \sigma. \tag{8}$$

La curva $\sigma \to S_i(u^0)[\sigma]$ si chiama **curva di shock dell'i-sima famiglia** (passante per u^0), mentre $\lambda_i^s(u^0)[\sigma]$ sarà chiamata **velocità dello shock** $\big(u^0,\, S_i(u^0)[\sigma]\big)$. Si noti che il vettore $S_i(u^0)[\sigma] - u^0$ risulta essere un'autovettore della matrice media

$$A(u^0,\, u^\sigma)) \doteq \int_0^1 A\big(u^\sigma + \xi(u^\sigma - u^0)\big)\, d\xi, \qquad u^\sigma \doteq S_i(u^0)[\sigma],$$

avente come autovalore corrispondente la velocità dello shock $\lambda_i^s(u^0)[\sigma]$. Se ne deduce che la velocità dello shock assume un valore vicino alla media tra le velocità caratteristiche $\lambda_i(u^0)$ e $\lambda_i(u^\sigma)$. In particolare, si ha il seguente sviluppo

$$\lambda_i^s(u^0)[\sigma] = \lambda_i(u^0) + \frac{\sigma}{2} D\lambda_i(u^0) \cdot r_i(u^0) + \mathcal{O}(1)\, |\sigma|^2,$$

dove il simbolo di landau $\mathcal{O}(1)$ denota una quantità uniformemente limitata in valore assoluto da una costante indipendente dal sistema (1).

Possiamo ricapitolare le considerazioni fin qui fatte dicendo che, se $u = u(t,x)$ è una soluzione debole di (1), allora in ogni suo punto di discontinuità il corrispondente stato destro u^D (definito come in (5)) deve appartenere ad una delle n curve di shock passanti per lo stato sinistro u^S, e la velocità della discontinuità deve essere precisamente la velocità dello shock.

In realtà le condizioni di Rankine-Hugoniot sono in generale insufficienti per determinare un'unica soluzione debole del Problema di Cauchy (1)-(2), come mostra il seguente

Esempio 1. Il problema di Cauchy per l'equazione (scalare) di Burger

$$u_t + \left[\frac{u^2}{2}\right]_x = 0, \tag{9}$$

$$u(0,x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0, \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 0, \end{cases} \tag{10}$$

ammette infinite soluzioni deboli. Precisamente, per ogni fissato $\alpha \in [0,\, 1]$, la funzione

$$u^\alpha(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < \alpha\, t/2, \\ \alpha & \text{se} \quad \alpha\, t/2 \leq x < (1+\alpha)\, t/2, \\ 1 & \text{se} \quad x \geq (1+\alpha)\, t/2, \end{cases} \tag{11}$$

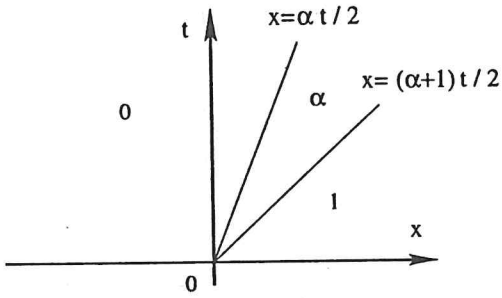

FIGURA 1

fornisce una soluzione di (9)-(10) nel senso delle distribuzioni. Infatti u_α è costante al di fuori delle due linee di discontinuità $\xi_1^\alpha(t) = \alpha\, t/2$, $\xi_2^\alpha(t) = (1+\alpha)\, t/2$, e dunque soddisfa l'equazione (9) nelle regioni non contenenti le linee ξ_1^α, ξ_2^α. D'altra parte si verifica immediatamente che u_α soddisfa anche le condizioni di **(RH)** lungo le due discontinuità ξ_1^α, ξ_2^α.

Pertanto, allo scopo di determinare un'unica soluzione del problema di Cauchy (1)-(2), è necessario aggiungere al concetto di soluzione debole delle ulteriori **condizioni di ammissibilità**, possibilmente motivate da considerazioni fisiche, che permettano di selezionare come ammissibili solo certi tipi di discontinuità. Varie condizioni di ammissibilità sono state proposte in letteratura dando luogo a differenti definizioni di soluzione:

1) *Limite viscoso:* la soluzione è esprimibile come limite di soluzioni di equazioni paraboliche (viscose) del tipo

$$u_t^\varepsilon + A(u^\varepsilon) u_x^\varepsilon = \varepsilon\, u_{xx}^\varepsilon,$$

al tendere a zero del termine viscoso;

2) *Disuguaglianza entropica:* la soluzione soddisfa nel senso delle distribuzioni una disuguaglianza associata ad una coppia di funzioni $(\eta,\, q)$, in cui $\eta : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ è un'*entropia convessa* per (1) e $q : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ è la corrispondente *funzione flusso entropico*;

3) *Condizione di stabilità di Lax:* in ogni punto di discontinuità (u^S, u^D) della soluzione, se gli stati u^S e u^D sono connessi da uno shock della i-sima famiglia che si muove con velocità s, allora lo shock è ammissibile se si ha

$$\lambda_i(u^S) \geq s \geq \lambda_i(u^R). \tag{12}$$

Nel prosieguo della discussione, ci limiteremo a considerare solo quest'ultimo tipo di condizioni di ammisibilità e dunque chiameremo **soluzione entropicamente ammissibile (alla Lax)** di (1) una soluzione debole di (1) che, in ogni punto di discontinuità, soddisfi le condizioni di Lax. Si noti che, nel caso dell'esempio sopra considerato, nessuno dei due shock ξ_1^α, ξ_2^α, soddisfa le condizioni di Lax (12), per qualunque $\alpha \in [0, 1]$.

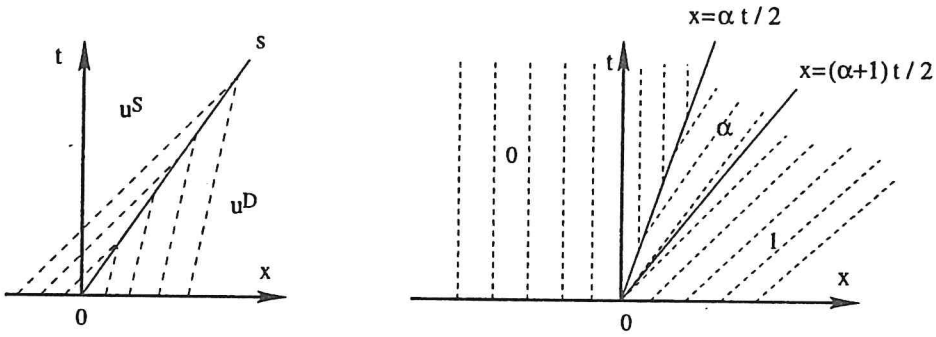

FIGURA 2

2. Il Problema di Riemann

Tre metodi si sono sviluppati in letteratura per costruire soluzioni deboli entropiche di (1)-(2) globalmente definite nel tempo:

i) *Lo schema di Glimm* [G], [LI3].

ii) *Il tracciamento dei fronti d'onda* [B1], [DP1], [Ri].

iii) *La viscosità evanescente* [DP2].

Questi metodi si basano tutti su argomenti di compattezza: stime a-priori della variazione totale e un'applicazione del teorema di Helly (in i) e ii)) o risultati di compattezza compensata (in iii)) garantiscono che qualche sottosuccessione di soluzioni approssimate converge in $\mathbb{L}^1_{loc}$ ad una soluzione debole, globalmente definita per ogni tempo $t > 0$. Noi concentreremo la nostra attenzione sul metodo del "tracciamento dei fronti d'onda" (wave front-tracing) che, assieme allo

schema di Glimm, fornisce i risultati più generali essendo il metodo della "viscosità evanescente" applicabile solo per sistemi di $n \leq 2$ leggi di conservazione.

Il mattone principale per la costruzione di soluzioni approssimate, sia nel tracciamento dei fronti d'onda che nello schema di Glimm, è costituito dalla soluzione del **problema di Riemann**, cioè del problema di Cauchy con dato iniziale $\overline{u}$ avente un'unica discontinuità nell'origine, e valore costante a sinista e a destra dell'origine:

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u^S & \text{se} \quad x < 0, \\ u^D & \text{se} \quad x \geq 0, \end{cases} \qquad u^S, u^D \in \Omega. \tag{13}$$

La soluzione $u = u(t,x)$ di questo tipo particolare di problema di Cauchy si esprime come funzione auto-simile, i.e. $u(t,x) = \omega(x/t)$ per una qualche $\omega : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, eventualmente discontinua. Prima di discutere l'espressione generale della soluzione di (1)-(13), dobbiamo introdurre delle ulteriori ipotesi sugli autovalori $\lambda_i(u)$ e sugli autovettori $r_i(u)$ della matrice Jacobiana $DF(u)$ della funzione flusso. A tale scopo diamo la seguente

Definizione 1. L'i-simo campo caratteristico $r_i(u)$ si dice

(GNL) genuinamente non-lineare se

$$D\lambda_i(u) \cdot r_i(u) \neq 0 \qquad \forall\, u \in \Omega;$$

(LD) linearmente degenere se

$$D\lambda_i(u) \cdot r_i(u) = 0 \qquad \forall\, u \in \Omega;$$

(NGNL) non genuinamente non-lineare (con un solo punto di flesso) se non è **(GNL)** e l'insieme

$$\Gamma_i \doteq \{u \in \Omega \ : \ D\lambda_i(u) \cdot r_i(u) = 0\} \tag{14}$$

è una varietà $n-1$ dimensionale di Ω, trasversale al campo caratteristico r_i, tale che

$$D(D\lambda_i \cdot r_i)(u) \cdot r_i(u) \neq 0 \qquad \forall\, u \in \Gamma_i. \tag{15}$$

Si noti che le ipotesi **(LD)** o **(GNL)**, nel caso in cui $n = 1$ (cioè per equazioni scalari), corrispondono a richiedere, rispettivamente, che la funzione flusso $F = F(u)$ sia affine o strettamente convessa (o concava). Mentre l'ipotesi **(NGNL)** equivale a richiedere che $F = F(u)$ non sia nè concava, nè convessa, ma abbia un unico punto di flesso. Per semplicità, ci riferiremo dunque a quest'ultima ipotesi come all'**ipotesi di non convessità** della funzione flusso.

Per il prosieguo della discussione, è utile introdurre anche la seguente notazione relativa ad i campi caratteristici $r_i, i = 1, \ldots, n$. Fissato $u^0 \in \Omega$, chiameremo **curva di rarefazione dell'i-sima famiglia** (passante per u^0) la curva integrale di r_i attraverso u^0, i.e. la curva ottenuta risolvendo il problema di Cauchy nello spazio degli stati

$$\frac{du}{d\sigma} = r_i(u), \qquad u(0) = u^0.$$

Denoteremo tale curva come $\sigma \mapsto R_i(u^0)[\sigma]$. Una proprietà fondamentale che lega le curve di shock e di rarefazione della stessa famiglia, passanti per lo stesso punto u^0, è che esse risultano avere in u^0 un contatto del second'ordine. Più precisamente, usando un'opportuna parametrizzazione, si ottengono i seguenti sviluppi

$$\begin{aligned} R_i(u^0)[\sigma] &= u^0 + \sigma\, r_i(u^0) + \frac{\sigma^2}{2} Dr_i(u^0)\cdot r_i(u^0) + \mathcal{O}(1)|\sigma|^3, \\ S_i(u^0)[\sigma] &= u^0 + \sigma\, r_i(u^0) + \frac{\sigma^2}{2} Dr_i(u^0)\cdot r_i(u^0) + \mathcal{O}(1)|\sigma|^3. \end{aligned} \tag{16}$$

Consideriamo ora i diversi tipi di **onde elementari** che compongono la soluzione generale di (1)-(13) a seconda delle diverse ipotesi fatte sui campi caratteristici.

1. Onde centrate di rarefazione. Supponiamo che l'i-simo campo caratteristico sia **(GNL)** e, in particolare, possiamo scegliere l'orientamento di r_i in modo tale che valga

$$D\lambda_i(u)\cdot r_i(u) > 0 \qquad \forall\, u \in \Omega. \tag{17}$$

Consideriamo $u^D \in \Omega$ appartenente alla parte positiva della curva integrale di r_i passante per $u^S \in \Omega$, i.e.

$$u^D = R_i(u^S)[\sigma], \qquad \text{per qualche} \qquad \sigma > 0. \tag{18}$$

Per ogni $\alpha \in [0,\, \sigma]$, definiamo

$$\lambda_i(\alpha) \doteq \lambda_i\big(R_i(u^S)[\alpha]\big).$$

A causa di (17) la funzione $\alpha \mapsto \lambda_i(\alpha)$ è strettamente crescente. Possiamo allora definire la funzione continua, regolare a tratti

$$u(t,x) = \begin{cases} u^S & \text{se} \quad x < t\,\lambda_i(u^S), \\ R_i(u^S)[\alpha] & \text{se} \quad x = t\,\lambda_i(\alpha), \qquad \alpha \in [0,\, \sigma], \\ u^D & \text{se} \quad x > t\,\lambda_i(u^D), \end{cases} \tag{19}$$

che risulta essere una soluzione debole entropica del problema di Riemann (1)-(13). Infatti l'equazione (1) è ovviamente soddisfatta nelle regioni in cui $x < t\,\lambda_i(u^S)$ o $x > t\,\lambda_i(u^D)$, dove u è costante e dunque $u_t \equiv u_x \equiv 0$. D'altra parte, poichè u è costante lungo ogni retta di equazione $x = t\,\lambda_i(\alpha)$, $\alpha \in [0,\, \sigma]$, si ha

$$u_t(t,x) + \lambda_i(\alpha) u_x(t,x) = 0 \qquad x = t\,\lambda_i(\alpha). \tag{20}$$

Osservando allora che

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \frac{dR_i(u^S)[\alpha]}{d\alpha}\cdot\Big(\frac{d\lambda_i(\alpha)}{d\alpha}\Big)^{-1}\cdot\frac{d\lambda_i(t,x)}{dx} = r_i\big(u(t,x)\big)\cdot\Big(\frac{d\lambda_i(\alpha)}{d\alpha}\Big)^{-1}\cdot\frac{1}{t}$$

è un autovettore della matrice $A\big(u(t,x)\big)$, con autovalore $\lambda_i(\alpha) = \lambda_i\big(u(t,x)\big)$, dalla (20) segue che u è soluzione dell'equazione (1) scritta in forma quasi-lineare

$$u_t + A(u)u_x = 0. \tag{21}$$

Si noti che l'ipotesi $\sigma > 0$ in (18) è fondamentale per garantire la buona definizione di u in quanto, nel caso $\sigma < 0$, la funzione definita da (19) risulterebbe essere multivoca nella regione in cui $x/t \in [\lambda_i(u^D), \lambda_i(u^S)]$ (assume in ogni punto tre valori).

2. Shock. Supponiamo ancora che l'i-simo campo caratteristico sia **(GNL)** e che valga la (17). Consideriamo $u^D \in \Omega$ appartenente alla parte negativa della curva di shock della i-sima famiglia passante per $u^S \in \Omega$, i.e.

$$u^D = S_i(u^S)[\sigma], \qquad \text{per qualche} \qquad \sigma < 0. \tag{22}$$

Allora, chiamando $\lambda^\sigma \doteq \lambda_i^s(u^S)[\sigma]$ la velocità dello shock determinata dalle condizioni di **(RH)** (8), definiamo la funzione

$$u(t,x) = \begin{cases} u^S & \text{se} \quad x < t\,\lambda^\sigma, \\ u^D & \text{se} \quad x > t\,\lambda^\sigma. \end{cases} \tag{23}$$

Si noti che, essendo $\sigma < 0$ e poichè vale (17), la velocità caratteristica λ_i è monotona decrescente lungo la parte negativa della curva di shock e dunque si ha

$$\lambda_i(u^D) < \lambda_i^s(u^S)[\sigma] < \lambda_i(u^S). \tag{24}$$

Ne consegue che la funzione definita da (23) è una soluzione debole entropica nel senso di Lax. Nel caso in cui $u^D = S_i(u^S)[\sigma]$ con $\sigma > 0$ invece, la funzione definita da (23) non soddisfa le condizioni di stabilità di Lax.

3. Discontinuità di contatto bilatere. Supponiamo che l'i-simo campo caratteristico sia **(LD)**. Consideriamo $u^D \in \Omega$ appartenente alla curva integrale di r_i passante per $u^S \in \Omega$, i.e.

$$u^D = R_i(u^S)[\sigma], \qquad \text{per qualche} \qquad \sigma. \tag{25}$$

Per ipotesi la i-sima velocità caratteristica λ_i è costante lungo questa curva. Ponendo allora $\lambda^\sigma \doteq \lambda_i(u^S)$, la funzione definita da (23) risulta essere una soluzione debole del problema di Riemann. Infatti, in questo caso si ha

$$\begin{aligned} F(u^D) - F(u^S) &= \int_0^\sigma DF\big(R_i(u^S)[\alpha]\big) \cdot r_i\big(R_i(u^S)[\alpha]\big)\, d\alpha \\ &= \lambda^\sigma \cdot \Big(R_i(u^S)[\sigma] - u^S\Big), \end{aligned} \tag{26}$$

da cui si deduce che u^S, u^D soddisfano le **(RH)**, qualunque sia il valore di σ in (25). D'altra parte le condizioni di Lax sono banalmente soddisfatte in quanto si ha

$$\lambda_i(u^S) = \lambda^\sigma = \lambda_i(u^D). \tag{27}$$

Si noti che la relazione (26), in particolare, mostra che le curve di shock e di rarefazione coincidono per campi caratteristici **(LD)**.

4. Onde miste: discontinuità di contatto unilatere + onde centrate di rarefazione. Supponiamo che l'i-simo campo caratteristico sia (NGNL) con un solo punto di flesso e, in particolare, supponiamo che valga

$$D(D\lambda_i \cdot r_i)(u) \cdot r_i(u) < 0 \qquad \forall\, u \in \Gamma_i, \tag{28}$$

cioè che, per ogni fissato $u \in \Gamma_i$, la funzione $\alpha \mapsto \lambda_i(R_i(u)[\alpha])$ assuma il suo massimo in $\alpha = 0$. Consideriamo due stati u^S, $u^D \in \Omega$ situati da parte opposta rispetto alla varietà Γ_i definita in (14), e supponiamo che tra u^S e u^D ci sia un punto u^M con le seguenti proprietà:

i) u^M appartiene alla parte positiva della i-sima curva di rarefazione per $u^L \in \Omega$, i.e.

$$u^M = R_i(u^L)[\sigma_1] \qquad \text{per qualche} \qquad \sigma_1 > 0; \tag{29}$$

ii) u^D appartiene alla parte positiva della i-sima curva di shock passante per $u^M \in \Omega$, i.e.

$$u^D = S_i(u^M)[\sigma_2] \qquad \text{per qualche} \qquad \sigma_2 > 0; \tag{30}$$

iii) la velocità dello shock (u^M, u^D) è uguale alla velocità caratteristica $\lambda_i(u^M)$, i.e.

$$\lambda_i(u^M) = \lambda_i^s(u^M)[\sigma_2]. \tag{31}$$

Dalle considerazioni fatte ai punti **1.** e **2.** segue che, ponendo

$$\lambda_i(\alpha) \doteq \lambda_i(R_i(u^S)[\alpha]) \qquad \alpha \in [0, \sigma_1],$$

la funzione

$$u(t,x) = \begin{cases} u^S & \text{se} \quad x < t\,\lambda_i(u^S), \\ R_i(u^S)[\alpha] & \text{se} \quad x = t\,\lambda_i(\alpha), \qquad \alpha \in [0, \sigma_1], \\ u^D & \text{se} \quad x > t\,\lambda_i(u^M), \end{cases} \tag{32}$$

risulta essere una soluzione debole entropica costituita da un'onda di rarefazione centrata, attaccata ad una discontinuità di contatto unilatera (sinistra). La discontinuità di contatto (u^M, u^D) soddisfa le condizioni di Lax

$$\lambda_i(u^M) = \lambda_i^s(u^M)[\sigma_2] > \lambda_i(u^D). \tag{33}$$

Fissato uno stato $u^0 \in \Gamma_i$, per determinare l'insieme degli stati (sinistri e destri) u^S, $u^D \in \Omega$, $u^S \in R_i(u^0)$, che si trovano da parti opposte rispetto a Γ_i, e per cui esista uno stato intermedio u^M con proprietà del tipo (29)-(31), dobbiamo risolvere il sistema di n equazioni scalari

$$\Big(u - R_i(u^0)[\alpha]\Big)\lambda_i\Big(R_i(u^0)[\alpha]\Big) = F(u) - F\big(R_i(u^0)[\alpha]\big) \tag{34}$$

nell'incognita (α, u). La relazione (34) implica che il punto u si trova sulla curva di shock che passa attraverso il punto $R_i(u^0)[\alpha]$, e che la velocità dello shock che connette $R_i(u^0)[\alpha]$ con u è precisamente $\lambda_i\big(R_i(u^0)[\alpha]\big)$. Pertanto l'equazione vettoriale (34) è equivalente all'equazione scalare

$$\lambda_i^s\Big(R_i(u^0)[\alpha]\Big)[t] = \lambda_i\Big(R_i(u^0)[\alpha]\Big) \tag{35}$$

nell'incognita (α, t). Infatti (α, t) è una soluzione di (35) se e solo se $\big(\alpha,\ S_i\big(R_i(u^0)[\alpha]\big)[t]\big)$ è soluzione di (34). Chiaramente una soluzione banale di (35) è $(\alpha, t) \equiv (0,0)$. Usando il Teorema della perturbazione singolare di Newton-Kantorovich [D], si dimostra l'esistenza di una soluzione non nulla di (35). Più precisamente, si dimostra l'esistenza di una funzione scalare $\sigma \to \mu_i(u^0)[\sigma]$, tale che

$$\lambda_i^s\Big(R_i(u^0)\big[\sigma - \mu_i(u^0)[\sigma]\big]\Big)\big[\mu_i(u^0)[\sigma]\big] = \lambda_i\Big(R_i(u^0)\big[\sigma - \mu_i(u^0)[\sigma]\big]\Big). \tag{36}$$

La curva regolare $\sigma \to M_i(u^0)[\sigma]$ definita da

$$M_i(u^0)[\sigma] = S_i\Big(R_i(u^0)\big[\sigma - \mu_i(u^0)[\sigma]\big]\Big)\big[\mu_i(u^0)[\sigma]\big], \tag{37}$$

si chiama **curva mista dell'i-sima famiglia** (passante per u^0). Questa curva, come la curva di shock $\sigma \to S_i(u^0)[\sigma]$, ha un contatto del second'ordine in u_0 con la curva di rarefazione $\sigma \to R_i(u^0)[\sigma]$. Una costruzione del tutto simile viene fatta nel caso in cui il campo caratteristico r_i sia **(NGNL)** (con un solo punto di flesso) e valga la

$$D\big(D\lambda_i \cdot r_i\big)(u) \cdot r_i(u) > 0 \qquad \forall\, u \in \Gamma_i, \tag{38}$$

al posto della (28).

Introduciamo adesso, per ogni famiglia caratteristica, delle curve definite in termini delle curve di shock, delle curve dirarefazione e delle curve miste, che saranno usate per costruire la soluzione generale del problema di Riemann. Per ogni fissato $u^S \in \Omega$, $i \in \{1, \dots, n\}$,

a) se il campo caratteristico r_i è **(GNL)** o **(LD)**, definiamo la curva

$$\Psi_i(u^S)[\sigma] = \begin{cases} R_i(u^S)[\sigma] & \text{se} \quad \sigma \geq 0, \\ S_i(u^S)[\sigma] & \text{se} \quad \sigma < 0; \end{cases} \tag{39}$$

b) se il campo caratteristico r_i è **(NGNL)** (con un solo punto di flesso), soddisfa la (28), e u^S si trova a sinistra di Γ_i, allora definiamo la curva

$$\Psi_i(u^S)[\sigma] = \begin{cases} S_i(u^S)[\sigma] & \text{se} \quad \sigma > \nu_i(u^S), \\ M_i(\pi_i(u^S))\big[\sigma + \delta_i(u^S)\big] & \text{se} \quad -\delta_i(u^S) < \sigma \leq \nu_i(u^S), \\ R_i(u^S)[\sigma] & \text{se} \quad 0 \leq \sigma \leq -\delta_i(u^S), \\ S_i(u^S)[\sigma] & \text{se} \quad \sigma < 0, \end{cases} \tag{40}$$

dove $\pi_i(u^S) = \Gamma_i \cap R_i(u^S)$, e $\delta_i(u^S)$ rappresenta la distanza con segno, lungo la curva di rarefazione, tra u^S e $\pi_i(u^S)$, i.e.

$$R_i(u^S)[\delta_i(u^S)] = \pi_i(u^S) \in \Gamma_i. \tag{41}$$

Una definizione del tutto simile di $\Psi_i(u^S)$ viene data nel caso in cui u^S si trovi a destra di Γ_i, o nel caso in cui valga la (38) al posto della (28).

La curva $\sigma \mapsto \Psi_i(u^S)[\sigma]$ definita da (38) o da (39) si chiama **curva elementare di Riemann dell'i-sima famiglia** (passante per u^S).

Pertanto, dati due stati u^S, $u^D \in \Omega$, se u^D appartiene all'i-sima curva elementare di Riemann $\Psi_i(u^S)$, la soluzione del problema di Riemann (1)-(13) risulta essere un'onda elementare: una rarefazione, uno shock, una discontinuità di contatto (bilatera), o un'onda mista, a seconda del tipo di campo caratteristico. Se invece u^D non appartiene ad alcuna curva elementare di Riemann, possiamo trovare degli stati intermedi $\omega_0 = u^S, \omega_1, \ldots, \omega_n = u^D$, in modo tale che ogni coppia di stati adiacenti ω_{i-1}, ω_i sia connessa da un'onda elementare, i.e.

$$\omega_i = \Psi_i(\omega_{i-1})[\sigma_i], \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{42}$$

Questo puó essere fatto per u^S, u^D, sufficientemente vicini, poichè in tal caso un'applicazione del teorema delle funzioni implicite garantisce l'esistenza di onde $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, univocamente determinate, tali che

$$u^D = \Psi_n\Big(\Psi_{n-1}\Big(\ldots \Psi_1(u^S)[\sigma_1]\Big)\Big)[\sigma_n]. \tag{43}$$

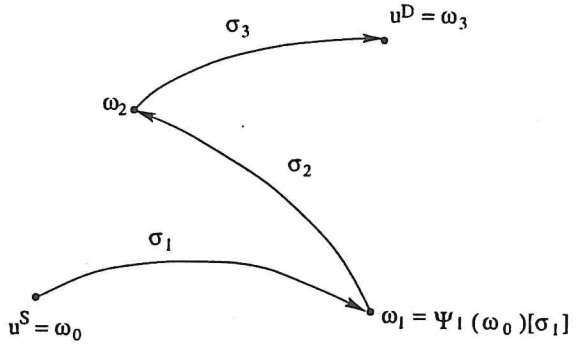

FIGURA 3

A sua volta la (43) determina gli stati intermedi ω_i che soddisfano la (42). La soluzione generale di (1)-(13) può essere dunque ottenuta sovrapponendo le soluzioni degli n problemi di Riemann

$$\begin{aligned} &u_t + [F(u)]_x = 0, \\ &u(0,x) = \begin{cases} \omega_{i-1} & \text{se} \quad x < 0, \\ \omega_i & \text{se} \quad x \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{44}$$

su settori differenti del piano x-t. Per costruzione, ogni singolo problema di Riemann ammette una soluzione debole entropica costituita da un'onda elementare dell'i-sima famiglia che viaggia con la

velocità caratteristica

1.
$$\lambda_i^\omega \in [\lambda_i^{\omega,-}, \lambda_i^{\omega,+}], \qquad \lambda_i^{\omega,-} \doteq \lambda_i(\omega_{i-1}), \qquad \lambda_i^{\omega,+} \doteq \lambda_i(\omega_i),$$

se la soluzione di (1)-(44) consiste di un'onda centrata di rarefazione;

2.
$$\lambda_i^{\omega,-} = \lambda_i^{\omega,+} \doteq \lambda_i^s(\omega_{i-1})[\sigma_{i-1}],$$

se la soluzione di (1)-(44) consiste di uno shock;

3.
$$\lambda_i^\omega \in [\lambda_i^{\omega,-}, \lambda_i^{\omega,+}], \qquad \lambda_i^{\omega,-} \doteq \lambda_i(\omega_{i-1}), \qquad \lambda_i^{\omega,+} \doteq \lambda_i(\widetilde{\omega}_i),$$

se la soluzione di (1)-(44) consiste di un'onda mista costituita di un'onda centrata di rarefazione che connette ω_{i-1} ad uno stato $\widetilde{\omega}_i$ (situato tra ω_{i-1} e $\widetilde{\omega}_i$), seguita da una discontinuità di contatto unilatera (sinistra).

Si noti che, supponendo $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, sufficientemente piccoli, se ne deduce che le velocità caratteristiche λ_i^ω delle singole onde elementari risultano essere vicine agli autovalori $\lambda_i(\omega_{i-1})$. Pertanto, la stretta iperbolicità (3) e la regolarità di $F(u)$ garantiscono che gli intervalli $[\lambda_i^{\omega,-}, \lambda_i^{\omega,+}]$ sono disgiunti, i.e.,

$$\lambda_1^{\omega,-} \leq \lambda_1^{\omega,+} < \lambda_2^{\omega,-} \leq \lambda_2^{\omega,+} < \ldots \lambda_n^{\omega,-} \leq \lambda_n^{\omega,+}.$$

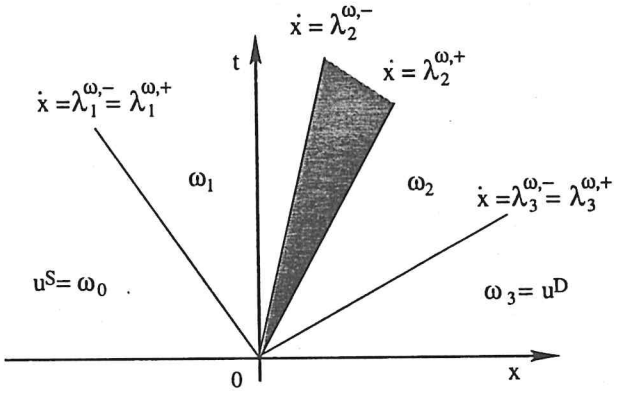

FIGURA 4

Allora, la soluzione (debole entropica) del problema di Riemann ottenuta sovrapponendo le soluzioni dei singoli problemi di Riemann (1)-(44), è ben definita. Ad esempio, se i campi caratteristici

sono **(GNL)** e, in particolare, l'i-sima onda è una rarefazione, essa assume l'espressione

$$u(t,x) = \begin{cases} u^S = \omega_0 & \text{se} \quad x < t\,\lambda_1^{\omega,-}, \\ R_i(\omega_{i-1})[\alpha] & \text{se} \quad x = t\,\lambda_i(\alpha), \qquad \alpha \in [0,\,\sigma_i], \\ \omega_i & \text{se} \quad t\,\lambda_i^{\omega,+} \le x < t\,\lambda_{i+1}^{\omega,-}, \\ u^D = \omega_n & \text{se} \quad x > t\,\lambda_n^{\omega,+}. \end{cases} \tag{45}$$

Si noti che questa soluzione è una funzione auto-simile, avendo la forma $u(t,x) = \psi(x/t)$, con $\psi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ in genere discontinua.

3. Il Problema di Cauchy

Descriveremo adesso l'idea generale del metodo del **tracciamento dei fronti d'onda (wave front-tracking)** usato per costruire soluzioni approssimate di (1)-(2). Una soluzione approssimata ottenuta con tale metodo è una funzione $u = u(t,x)$ costante a tratti, che ammette discontinuità lungo un numero finito di segmenti o semirette (che chiameremo **fronti d'onda**) nel piano x-t, e che soddisfa nei punti di discontinuità delle condizioni di **(RH)** approssimate.

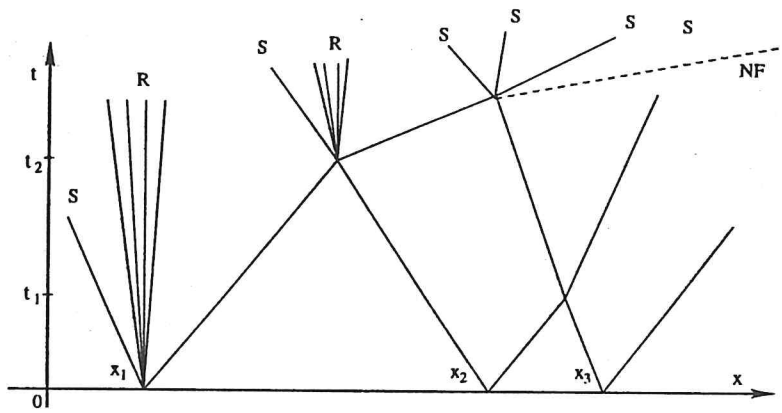

Figura 5

La costruzione inizia al tempo $t = 0$ prendendo una funzione costante a tratti $u(0,\cdot)$ che approssima (nella norma $\mathbb{L}^1$) il dato iniziale $\overline{u}$ a variazione totale piccola. Siano $x_1 < \cdots < x_N$ i punti in cui $u(0,\cdot)$ è discontinua. Per ogni $\ell = 1,\ldots,N$, e per tempi positivi in un intorno di $(0,x_\ell)$, risolviamo in maniera approssimata il problema di Riemann generato dal salto $\big(u(0,x_\ell-),\, u(0,x_\ell+)\big)$

con una funzione della forma $u(t,x) = \psi((x - x_\ell)/t)$, per una qualche $\psi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ costante a tratti. Più precisamente, se la soluzione esatta del problema di Riemann contiene solo shock o discontinuità di contatto, allora u coinciderà con la soluzione esatta che è già costante a tratti. D'altra parte, se la soluzione del problema di Riemann contiene onde centrate di rarefazione o onde miste, allora approssimeremo un'onda di rarefazione $(\omega_{i-1}^\ell, \omega_i^\ell)$ con un "ventaglio di rarefazione" costante a tratti, ottenuto inserendo degli stati intermedi tra ω_{i-1}^ℓ e ω_i^ℓ che corrispondono a piccole discontinuità che viaggeranno con una velocità vicina alla velocità caratteristica $\lambda_i(\omega_{i-1}^\ell)$. Naturalmente le discontinuità dei fronti d'onda del ventaglio di rarefazione non soddisfano le condizioni di **(RH)** esatte (in quanto gli stati intermedi non sono connessi da una curva di shock), ma soddisfano delle condizioni di **(RH)** approssimate. La soluzione approssimata u così definita può essere prolungata fino al primo istante t_1 in cui interagiscono (si incontrano) due (o più) fronti d'onda. A questo punto, poichè $u(t_1, \cdot)$ è ancora una funzione costante a tratti, possiamo di nuovo risolvere in maniera approssimata i corrispondenti problemi di Riemann con una funzione costante a tratti, così come abbiamo fatto al tempo $t = 0$. La soluzione può essere quindi ulteriormente prolungata fino al successivo istante t_2 in cui si verifica un'altra interazione tra fronti d'onda, etc ...

Per sistemi generali di n leggi di conservazione il principale problema tecnico posto da questo procedimento è dovuto al fatto che il numero dei fronti d'onda può diventare infinito in tempo finito. Infatti ad ogni generico punto di interazione ci saranno in generale due fronti d'onda entranti, mentre il numero dei fronti d'onda uscenti sarà n (se tutte le onde elementari che risolvono il problema di Riemann sono shock o discontinuità di contatto) o maggiore di n (se la soluzione del problema di Riemann contiene qualche rarefazione od onda mista). Per superare questa difficoltà è necessario modificare l'algoritmo fin qui descritto adottando due modi differenti di risolvere il problema di Riemann: uno è quello appena richiamato che introduce vari fronti d'onda nuovi. L'altro invece è un algoritmo semplificato che determina una soluzione contenente un numero minimo di fronti d'onda. In questo secondo caso, tutte le onde nuove che verebbero create sono raggruppate insieme in un unico fronte d'onda artificiale (**fronte d'onda non fisico**) che viene fatto viaggiare con velocità maggiore di quella di tutti gli altri fronti d'onda. Questo algoritmo semplificato viene usato quando la grandezza dei fronti d'onda interagenti (la grandezza del salto) è più piccola di una certa soglia fissata.

Utilizzando il procedimento fin qui descritto si possono costruire soluzioni approssimate di (1)-(2) definite per tutti i tempi $t > 0$. L'argomento principale della dimostrazione di questo risultato si basa sulla derivazione di **stime a-priori della variazione totale** ottenute introducendo un **funzionale** del second'ordine (rispetto alla grandezza dei fronti d'onda presenti nella soluzione) che misura l'**interazione potenziale** tra fronti d'onda. Argomenti di compattezza permettono poi di mostrare che una sottosuccessione converge ad una soluzione debole entropica di (1)-(2).

Possiamo allora enunciare il risultato generale di esistenza per il problema di Cauchy (1)-(2) con condizione iniziale a variazione totale piccola.

Teorema 1. *Sia il sistema (1) strettamente iperbolico e supponiamo che i campi caratteristici siano o* **(LD)** *o* **(GNL)**, *oppure* **(NGNL)**. *Allora esite una costante* $\overline{\delta} > 0$ *tale che, per ogni condizione iniziale* $\overline{u} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, *con*

$$Var.\ Tot(\overline{u}) \leq \overline{\delta}, \tag{46}$$

il problema di Cauchy (1)-(2) ammette una soluzione debole entropica definita per tutti i tempi $t \geq 0$.

Questo risultato è stato ottenuto per la prima volta, per sistemi con campi caratteristici **(LD)** o **(GNL)**, usando lo schema di Glimm in [G]. Le idee principali sul tracciamento dei fronti d'onda sono state introdotte in [Da] per equazioni scalari, in [DP1] per sistemi di due leggi di conservazione, e poi estese al caso generale di n leggi di conservazione (sempre sotto le ipotesi che i campi caratteristici siano **(LD)** o **(GNL)**) in [BJ], [B1], [Ri].

Il caso non convesso è stato estensivamente studiato da T.P. Liu che ha dapprima determinato la soluzione del problema di Riemann in [LI1], [LI1], e poi ha dimostrato l'esistenza globale di una soluzione del problema di Cauchy, usando lo schema di Glimm, in [LI4]. In [AM3] abbiamo introdotto un algoritmo di tracciamento dei fronti d'onda che permette di ottenere il risultato di esistenza del Teorema 1 per *sistemi di due leggi di conservazione* con campi caratteristici **(NGNL)**. L'estensione di questo risultato al caso più generale di *sistemi di n leggi di conservazione* con campi caratteristici **(NGNL)** è trattata in [AM4].

BIBLIOGRAFIA

[AM1] F. ANCONA, A. MARSON, A note on the Riemann problem for general $n \times n$ systems of conservation laws, apparirà in *J. Math. Anal. Appl.*.

[AM2] F. ANCONA, A. MARSON, Basic estimates for a front-tracking algorithm for general 2×2 conservation laws, apparirà in *Mathematical Models & Methods in Applied Science - M3AS.*

[AM3] F. ANCONA, A. MARSON, Well-posedness for general 2×2 conservation laws, inviato per la pubblicazione a *Comm. Partial Differential Equations*, (1999).

[AM4] F. ANCONA, A. MARSON, A wave front-tracking algorithm for $n \times n$ non genuinely nonlinear conservation laws, inviato per la pubblicazione a *J. Differential Equations*, (1999).

[AM5] F. ANCONA, A. MARSON, $\mathbb{L}^1$-Stability for $N \times N$ non genuinely nonlinear conservation laws, inviato per la pubblicazione a *Arch. Rational Mech. Anal.*, (1999).

[BJ] P. BAITI, H.K. JENSSEN, On the front-tracking algorithm, *J. Math. Anal. Appl.*, **217** (1998), no. 2, pp. 395-404.

[B1] A. BRESSAN, Global Solutions to systems of conservation laws by wave-front Tracking, *J. Math. Anal. Appl.*, **170** (1992), pp. 414-432.

[B3] A. BRESSAN, Hyperbolic systems of conservation laws. A survey of recent uniqueness results, *Rev. Mat. Complutense*, (1999).

[B2] A. BRESSAN, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws - The one-dimensional Cauchy problem, Oxford Univ. Press*, (2000), in corso di stampa.

[BC1] A. BRESSAN, R.M. COLOMBO, The semigroup generated by 2×2 conservation laws, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **133** (1995), pp. 1-75.

[Da] C. DAFERMOS, Polygonal approximations of solutions of the initial value problem for a conservation law, *J. Math. Anal. Appl.*, **38**, 1972, pp. 33-41.

[DP1] R. DIPERNA, Global existence of solutions to nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, *J. Differential Equations*, **20** (1976), pp. 187-212.

[DP2] R. DIPERNA, Convergence of approximate solutions to conservation laws, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **82** (1983), pp. 27-70.

[G] J. GLIMM, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **18** (1965), pp. 697-715.

[LA] P.D. LAX, Hyperbolic Systems of Conservation Laws II, *Comm. on Pure and Applied Math.*, **10** (1957), pp. 537-566.

[LI1] T.P. LIU, The Riemann problem for general 2×2 conservation laws, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **199** (1974), pp. 89-112.

[LI2] T.P. LIU, The Riemann problem for general systems of conservation laws, *J. Differential Equations*, **18** (1975), pp. 218-234.

[LI3] T.P. LIU, The deterministic version of the Glimm scheme, *Comm. on Pure and Applied Math.*, **57** (1977), pp. 135-148.

[LI4] T.P. LIU, Admissible solutions of hyperbolic conservation laws, *Memoir Amer. Math. Soc.*, **30** (1981), no. 240.

[Ri] N.H. RISEBRO, A front-tracking alternative to the random choice method, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **117** (1993), pp. 1125-1139.

[RMS1] T.RUGGERI, A.MURACCHINI, L.SECCIA, Continuum Approach to Phonon Gas and Shape Canges of Second Sound via Shock Waves Theory, *Nuovo Cimento D* **16** (1994), pp. 15-44.

[RMS2] T.RUGGERI, A.MURACCHINI, L.SECCIA, Second sound and characteristic temperature in solids, *Phisical Review B* **54** (1996), pp. 332-339.

[S] J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Second Edition, Springer-Verlag, 1994.